数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 157-166

$\mathbb{Z}_2$-orbifold construction associated with (-1)-isometry and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24

川節 和哉
Kawasetsu, Kazuya
Institute of Mathematics,
Academia Sinica
E-mail adress: kawasetsu@gate.sinica.edu.tw

頂点作用素代数 (VOA) の理論において, 中心電荷 24 の (強正規な) 正則 VOA の分類は最も重要な問題の一つである. シェレケンス [Sch] は 1993 年に中心電荷 24 の正則 VOA を部分的に分類し, それらのウェイト 1 リー環となり得る 71 個のリー環のリストを与えた ([EMS] も見よ). 最近, シェレケンスのリスト中の全てのリー環に対して, それらをウェイト 1 リー環として持つ中心電荷 24 の正則 VOA が具体的に構成された ([EMS], [LS2], [LLin], [SS]). ところで, ニーマイヤー格子 (階数 24 のユニモジュラー格子) は, そのルート系によって一意に決定される. そのアナロジーを考えて, 中心電荷 24 の正則 VOA は, ウェイト 1 リー環の構造によって一意に定まると期待されてきた. これまでの先行研究では, シェレケンスのリスト中の 30 個のリー環について, 正則 VOA の一意性が証明されていた. 本稿では, シェレケンスのリスト中の残り 41 個のリー環のうち, 13 個のリー環について, [LS3] の逆オービフォールド構成法を用いて, 中心電荷 24 の正則 VOA の一意性を示す.

研究集会での講演を薦めてくださった代表者の山内博氏に感謝する.

1　中心電荷24の正則頂点作用素代数

頂点作用素代数 (VOA) とは, 非負整数で次数付けられたベクトル空間 $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ と線形写像の族

$$(n) : V \otimes V \longrightarrow V, \quad a \otimes b \mapsto a_{(n)}b, \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

特別な元 $\mathbf{1} \in V_0$(真空元), $\omega \in V_2$(共形元), 線形写像 $\partial : V \to V$(トランスレーション作用素) の五つ組 $(V, \{(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{1}, \omega, \partial)$ であり, $(V_n)_{(k)}(V_m) \subset V_{n+m-k-1}$ 等の公理を満たすものである. VOA のある公理より, $\omega_{(3)}\omega \in \mathbb{C}\mathbf{1}$ となるが, 等式 $\omega_{(3)}\omega = c\mathbf{1}$ で定まる数 $c \in \mathbb{C}$ のことを, V の中心電荷と呼ぶ. V_n の元は, (共形) ウェイト n を持つと言う.

V を VOA とする. V 上の加群とは, ベクトル空間 M と線形写像の族 $(n) : V \otimes M \to M$, $a \otimes v \mapsto a_{(n)}v$, $(n \in \mathbb{Z})$ であって, いくつかの公理を満たすものである. また, 通常の代数の場合と同様に, 加群の部分加群, 既約加群等の概念がある. M を V 加群とする. M が非自明な V 上の部分加群を持たないとき, M は既約であるという.

V を VOA とする. V が C_2-余有限, 有理的, 自己双対かつ CFT 型であるとき, V は強正規であると言う. また, V の既約表現が同型を除いて唯一つであるとき, V は正則であるという. 例えば, ユニモジュラー格子 L に付随する格子 VOA V_L は強正規な正則 VOA である. 散在型有限単純群モンスターを自己同型群として持つ VOA $V^\natural$ (ムーンシャイン VOA) も強正規な正則 VOA であり, 中心電荷は 24 である.

V のウェイト 1 空間 $V_1 \subset V$ は, リー積 $[a, b] = a_{(0)}b$ $(a, b \in V_1)$ によってリー環の構造を持ち, V のウェイト 1 リー環と呼ばれる. $\mathfrak{g}$ を V_1 の単純な部分リー環とする. $\mathfrak{g}$ で生成される V のアフィン部分 VOA がレベル k であるとき, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k$ と書き, k を $\mathfrak{g}$ のレベルと呼ぶ.

命題 1.1. [DM1, Theorem 3, (1.1)] V を中心電荷 24 の強正規な正則 VOA とする. このとき, V のウェイト 1 リー環 V_1 は $\{0\}$, $\mathbb{C}^{24}$ (24 次元のアーベリアン・リー環), 半単純リー環のいずれかである. V_1 が半単純であると仮定する. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ. (i) V の共形元と, V_1 で生成されるアフィン VOA の菅原共形元とが一致する. (ii) V_1 の任意の単純イデアル $\mathfrak{s}$ に対して,

$$\frac{h^\vee}{k} = \frac{\dim V_1 - 24}{24}$$

が成り立つ. ここで, $h^\vee$ は $\mathfrak{s}$ の双対コクセター数であり, k は $\mathfrak{s}$ のレベルである.

シェレケンス [Sch] は中心電荷 24 の強正規な正則 VOA を部分的に分類し, それらのウェイト 1 リー環となり得る 71 個のリー環のリストを与えた ([EMS] も見よ). 最近, シェレケンスのリスト中の全てのリー環に対して, それらをウェイト 1 リー環として持つ中心電荷 24 の強正規な正則 VOA が具体的に構成された ([EMS], [LS2], [LLin], [SS]). $\mathfrak{g}$ をシェレケンスのリスト中のリー環とし, V を $V_1 \cong \mathfrak{g}$ を満たす中心電荷 24 の強正規な正則 VOA とする. $\mathfrak{g}$ が次のリー環のときには, V の構造が一意に決定されることが分かっている. (i) ニーマイヤー格子に付随する格子 VOA (24 個) [DM2]; (ii) $A_{1,2}^{16}$, $E_{8,2}B_{8,1}$[LS1]; (iii) $E_{6,3}G_{2,1}^3$, $A_{2,3}^6$, $A_{5,3}D_{4,3}A_{1,1}^3$ [LS3]; (iv) $A_{8,3}A_{2,1}^2$ [LLin].

本稿では, 新たに 13 個のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して, V の一意性を示す. 次が本稿の主定理である.

定理 1.1. [KLL] 中心電荷 24 の強正規な正則 VOA V の構造は, そのウェイト 1 リー環 V_1 が次のタイプであるとき, リー環 V_1 の構造によって一意的に決定する:

$$A_{1,4}^{12},\quad B_{2,2}^{6},\quad B_{3,2}^{4},\quad B_{4,2}^{3},\quad B_{6,2}^{2},\quad B_{12,2},\quad D_{4,2}^{2}B_{2,1}^{4},\quad D_{8,2}B_{4,1}^{2}, \tag{1.1}$$

$$A_{3,2}^{4}A_{1,1}^{4},\quad D_{5,2}^{2}A_{3,1}^{2},\quad D_{9,2}A_{7,1},\quad C_{4,1}^{4},\quad D_{6,2}B_{3,1}^{2}C_{4,1}. \tag{1.2}$$

(1.1) 中のリー環は, [DGM] に現れる, ニーマイヤー格子 N に付随する格子 VOA V_N と N の (-1)-等長写像の持ち上げ $\theta \in \mathrm{Aut}(V_N)$ に $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド構成法を適用して得られる VOA のリー環と同型である.

2 逆オービフォールド構成法

V を強正規な正則 VOA, g を V の自己同型とする. g の位数が素数 p であるとする. 固定点 VOA $V^g = \{v \in V \mid g(v) = v\}$ の強正規な正則拡大 VOA W であって, V^g 上の加群として

$$W = V^g \oplus \bigoplus_{r=1}^{p-1} V^{\mathrm{T}}(g^r)_{\mathbb{Z}}$$

と分解するものが存在するとき, 組 (V, g) に $\mathbb{Z}_p$-オービフォールド構成法が適用可能であると言い, そのような拡大 VOA W を $W = \tilde{V}(g)$ と書く.

V のウェイト 1 リー環 V_1 が半単純であると仮定し, h を V_1 の半単純な元とする. V の自己同型 $\sigma_h := \exp(-2\pi\sqrt{-1}h_{(0)})$ を考える. V 上の内積 $\langle | \rangle$ を, $\langle \mathbf{1} | \mathbf{1} \rangle = -1$

となるように定める. V_1 のレベル k の単純イデアル $\mathfrak{s}$ に対して, $\langle|\rangle|_{\mathfrak{s}} = k(|)$ となる. ここで, $(|)^{'}$ は $\mathfrak{s}$ の正規化された内積である.

定理 2.1 ([LS2]). h が次の (i)–(iii) を満たすとき, 組 (V, σ_h) に $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド構成法が適用可能である: (i) $\mathrm{Spec}(h_{(0)}) \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ かつ $\mathrm{Spec}(h_{(0)}) \not\subset \mathbb{Z}$, (ii) $\langle h|h\rangle \in \mathbb{Z}$, (iii) $V^{(h)}$ のウェイトは正.

さらに, 次の命題が成り立つ.

命題 2.1. ([Mo], [LS2]) 公式

$$\dim V_1 + \dim \tilde{V}(\sigma_h)_1 = 3 \dim V_1^{\sigma_h} + 24(1 - \dim V^{\mathrm{T}}(\sigma_h)_{1/2})$$

が成り立つ (モンタギューの公式). 特に, $V_1^{\sigma_h} = V_1$ かつ $V^{\mathrm{T}}(\sigma_h)_{1/2} = 0$ であれば, 等式

$$\dim \tilde{V}(\sigma_h)_1 = 2 \dim V_1 + 24 \tag{2.1}$$

が成り立つ.

(V, g) に $\mathbb{Z}_p$-オービフォールド構成法が適用可能であると仮定し, 得られた VOA を $W = \tilde{V}(g)$ とする. W の自己同型 $a = a_{V,g}$ を, $a|_{V^g} = 1$, $a|_{V^{\mathrm{T}}(g^r)_{\mathbb{Z}}} = e^{2\pi\sqrt{-1}r/p}$ $(1 \le r \le p-1)$ と定める. このとき, 組 (W, a) には再び $\mathbb{Z}_p$-オービフォールド構成法が適用可能であり, $\tilde{W}(a) \cong V$ を満たす ([EMS] を見よ).

$\mathfrak{g}$ を半単純リー環とし, h を $\mathfrak{g}$ の半単純元とする. 強正規な正則 VOA U であって, 任意の強正規な正則 VOA V に対して, $V_1 \cong \mathfrak{g}$ であるとき, 次の条件が成り立つものが存在すると仮定する:

(a) σ_h は素位数 p を持ち, 組 (V, σ_h) にオービフォールド構成法が適用可能である;
(b) $\tilde{V}(\sigma_h) \cong U$;
(c) U の位数 p の任意の自己同型 g に対して, $U_1^g \cong \mathfrak{g}^{\sigma_h}$ であるならば, g は $\mathrm{Aut}(U)$ 内で a_{V,σ_h} と共役である.

このとき, [LS3] で本質的に得られた次の定理が成り立つ (逆オービフォールド構成法).

定理 2.2. $V_1 \cong \mathfrak{g}$ を満たす強正規な正則 VOA V の構造は同型を除いて一意である.

本稿では, $\mathfrak{g}$ は 1.1 中のリー環ととり, U はあるニーマイヤー格子 N に付随する格子 VOA V_N ととる. また, a_{V,σ_h} が (-1)-等長写像の持ち上げ $\theta \in \mathrm{Aut}(V_N)$ と共役である場合を扱っている. 条件 (b) を示すために, [DM2, Theorem 3] から得られる次の結果を用いる.

命題 2.2. N をニーマイヤー格子とし, U を $U_1 \cong (V_N)_1$ を満たす中心電荷 24 の強正規な正則 VOA とする. このとき, $U \cong V_N$ である.

さらに, 条件 (c) を示すために, 次を用いる.

命題 2.3. ([DGH, Theorem D.6]) L を正定値偶格子とすると, L の (-1)-等長写像の任意の持ち上げは $\mathrm{Aut}(V_L)$ 内で共役である.

3 リー環の自己同型

$\mathfrak{s}$ をランク n の単純リー環とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{s}$ のカルタン部分代数とする. $\mathfrak{s}$ の自己同型 g, g' が共役のとき, $g \sim g'$ と書く. $[x]$ を, 実数 x を超えない最大の整数とする. 次の結果は [H, Theorem 6.1, TABLE II and pp.513–515] から従う.

命題 3.1. σ_1, σ_2 を $\mathfrak{s}$ の位数 2 の自己同型とする. このとき $\sigma_1 \sim \sigma_2$ と $\mathfrak{s}^{\sigma_1} \cong \mathfrak{s}^{\sigma_2}$ とは同値である. さらに, もし σ が $\mathfrak{s}$ の位数 2 の自己同型であって $\mathfrak{s}^\sigma$ が半単純リー環ならば, $\mathfrak{s}^\sigma$ は次で与えられる:
(1) $(A_{2n})^\sigma \cong B_n$ $(n \geq 1)$, **(2)** $(A_{2n+1})^\sigma \cong C_{n+1}$, D_{n+1} $(n \geq 2)$, **(3)** $(B_n)^\sigma \cong B_{n-p} \oplus D_p$ $(n \geq 3,\ 2 \leq p \leq n)$, **(4)** $(C_n)^\sigma \cong C_p \oplus C_{n-p}$, $(n \geq 2,\ 1 \leq p \leq [n/2])$, **(5)** $(D_n)^\sigma \cong D_p \oplus D_{n-p}$ $(n \geq 4,\ 2 \leq p \leq [n/2])$ and $(D_n)^\sigma \cong B_p \oplus B_{n-p-1}$ $(n \geq 3,\ 0 \leq p \leq [(n-1)/2])$, **(6)** $(E_6)^\sigma \cong F_4$, C_4, $A_1 \oplus A_5$, **(7)** $(E_7)^\sigma \cong A_7$, $A_1 \oplus D_6$, **(8)** $(E_8)^\sigma \cong D_8$, $A_1 \oplus E_7$, **(9)** $(F_4)^\sigma \cong B_4$, $A_1 \oplus C_3$, **(10)** $(G_2)^\sigma \cong A_1 \oplus A_1$.

$\theta_0 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{s})$ を $\mathfrak{h}$ の (-1)-自己同型の持ち上げとする.

命題 3.2. (cf. [DGM]) $\mathfrak{s}$ が半単純ならば, $\mathfrak{s}^{\theta_0}$ は次で与えられる:
(1) $(A_{2n})^{\theta_0} \cong B_n$, **(2)** $(A_{2n+1})^{\theta_0} \cong D_{n+1}$, **(3)** $(D_{2n})^{\theta_0} \cong D_n^2$, **(4)** $(D_{2n+1})^{\theta_0} \cong B_n^2$, **(5)** $(E_6)^{\theta_0} \cong C_4$, **(6)** $(E_7)^{\theta_0} \cong A_7$, **(7)** $(E_8)^{\theta_0} \cong D_8$.

$\mathfrak{f}$ を半単純リー環とし, 単純イデアル分解を $\mathfrak{f} = \bigoplus_{i=1}^t \mathfrak{f}_{(j)}$ と書く. σ を $\mathfrak{f}$ の位数 2 の自己同型とし, $\mathfrak{f}^\sigma = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{g}_{(i)}$ を $\mathfrak{f}^\sigma$ の単純イデアル分解とする. 次は本質的に [LS3, Proposition 3.7] から従う.

命題 3.3. 任意の $1 \leq j \leq t$, $1 \leq i \leq s$ に対して $\mathfrak{f}_{(j)} \not\cong \mathfrak{g}_{(i)}$ ならば, $\mathfrak{f}^\sigma$ は単純イデアルの和 $\mathfrak{f}^\sigma = \bigoplus_{j=1}^t \mathfrak{f}_{(j)}^\sigma$ に分解する.

表 1: リー環の組 $(\mathfrak{g},\mathfrak{f})$.

ケース	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{f}$	
(A) $(n\|12)$	$B_{n,2}^{12/n}$	$A_{2n,1}^{12/n}$	
(B) $(n\|4)$	$D_{2n,2}^{4/n}B_{n,1}^{8/n}$	$A_{4n-1,1}^{4/n}D_{2n+1,1}^{4/n}$	
(C) $(n\|4)$	$D_{2n+1,2}^{4/n}A_{2n-1,1}^{4/n}$	$A_{4n+1,1}^{4/n}X_{n,1}$	$(X_1 = D_4,\ X_2 = D_6,\ X_4 = E_7)$
(D)	$C_{4,1}^4$	$E_{6,1}^4$.	
(E)	$D_{6,2}B_{3,1}^2C_{4,1}$	$A_{11,1}D_{7,1}E_{6,1}$	

ここで $n|N$ は正整数 n が N を割り切ることを表す. また, 次の同一視を使っている: $D_{2,k} = A_{1,k}^2$, $D_{3,k} = A_{3,k}$, $B_{1,k} = A_{1,2k}$.

表 1 内のリー環の組 $(\mathfrak{g},\mathfrak{f})$ を考える.

$\mathfrak{g}$ は, $A_{1,2}^{16}$ (ケース (B), $n=1$) を除いて, (1.1) 内のリー環である. また, $\mathfrak{f}$ はあるニーマイヤー格子 $N(\mathfrak{f})$ に付随する格子 VOA $V_{N(\mathfrak{f})}$ のウェイト 1 リー環と同型である. $\mathfrak{f}$ のあるカルタン部分代数の (-1)-自己同型の持ち上げを $\theta_0 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{f})$ と書く.

定理 3.1. $(\mathfrak{g},\mathfrak{f})$ を表 1 のリー環の組とする. このとき, $\mathfrak{f}$ の位数 2 の自己同型 σ であって, $\mathfrak{f}^\sigma \cong \mathfrak{g}$ を満たすものは, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{f})$ 内で θ_0 と共役である.

定理を示すには, 命題 3.1 を用いる. これと命題 2.3 により, 次の系を得る.

系 3.1. $V_{N(\mathfrak{f})}$ の位数 2 の自己同型 μ は, $(V_{N(\mathfrak{f})})_1^\mu \cong \mathfrak{g}$ を満たすならば, $\mathrm{Aut}(V_{N(\mathfrak{f})})$ 内で θ に共役である.

4 アフィン VOA のツイスト加群のウェイト

本節では, アフィン VOA のツイスト加群の共形ウェイトに対するいくつかの結果を示す.

$\mathfrak{s}$ を単純リー環とし, λ を $\mathfrak{s}$ の主整ウェイトとする. $L(\lambda)$ を λ を最高ウェイトに持つ $\mathfrak{s}$ 上の最高ウェイト既約加群とする. $L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合を $\Pi(\lambda)$ と書く. i を $\mathfrak{s}$ のディンキン図の節とする.

補題 4.1. **(1)** $\mathfrak{s} = D_{2n}$ のとき, $\min\{(\varpi_i|\mu) \mid \mu \in \Pi(\lambda)\} = -(\varpi_i|\lambda)$ である. **(2)** i が $\mathfrak{s}$ のディンキン図の任意の自己同型で固定されるとき, $\min\{(\varpi_i|\mu) \mid \mu \in \Pi(\lambda)\} = -(\varpi_i|\lambda)$ である.

正整数 k に対して, $P^+(\mathfrak{s},k)$ を, $\mathfrak{s}$ のレベル k の主整ウェイト全体のなす集合とする.

$\mathfrak{g}$ を半単純リー環とし, $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^t \mathfrak{g}_{(i)}$ を単純イデアル分解とする. $k_1,\dots,k_t$ を正整数とし, アフィン VOA $W=\bigoplus_{i=1}^t L_{\mathfrak{g}_{(i)}}(k_i,0)$ を考える. このとき, $W_1\cong\mathfrak{g}$ である. $h=(h_1,\dots,h_t)$ を, $\mathfrak{g}$ の半単純元とする. $\mathfrak{g}$ の任意のルート α に対して, $(h|\alpha)\ge -1$ と仮定し, $h_{(0)}:W\to W$ のスペクトラムがある正整数 T に対して $\frac{1}{T}\mathbb{Z}$ に含まれると仮定する.

補題 4.2 ([LS3, Lemma 2.7]). $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{g}}=P^+(\mathfrak{g}_{(1)},k_1)\times\cdots\times P^+(\mathfrak{g}_{(t)},k_t)$ とおき, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t)$ を $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{g}}$ の元とする. このとき, $(\bigotimes_{i=1}^t L_{\mathfrak{g}_{(i)}}(k_i,\lambda_i))^{(h)}$ の最低共形ウェイトは $w(\boldsymbol{\lambda})=\ell(\boldsymbol{\lambda})+\sum_{i=1}^t\min\{(h_i|\mu)\mid\mu\in\Pi(\lambda_i)\}+\langle h|h\rangle/2$ である. ここで, $\ell(\boldsymbol{\lambda})$ は $\bigotimes_{i=1}^t L_{\mathfrak{g}_{(i)}}(k_i,\lambda_i)$ の最低共形ウェイトである.

V を強正規な正則 VOA とし, $V_1=\mathfrak{g}_{1,k_1}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{t,k_t}$ とする. このとき, W は V_1 で生成されるアフィン部分 VOA と同型である. 各 $\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{P}_{\mathfrak{g}}$ に対して, $d(\boldsymbol{\lambda})=w(\lambda)-\ell(\lambda)$ とおく. また, $\boldsymbol{0}=(0,\dots,0)\in\boldsymbol{P}_{\mathfrak{g}}$, $L(\boldsymbol{\lambda})=\bigotimes_{i=1}^t L_{\mathfrak{g}_{(i)}}(k_i,\lambda_i)$ と書く.

補題 4.3. 任意の $\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{P}_{\mathfrak{g}}$ に対して $d(\boldsymbol{\lambda})>-3/2$ と仮定し, $d(\boldsymbol{0})>1/2$ と仮定する. このとき $V^{\mathrm{T}}(\sigma_h)$ の共形ウェイトは 1/2 より大きい. 特に, $V^{\mathrm{T}}(\sigma_h)_{1/2}=0$.

5 オービフォールド構成

定理 1.1 を精密化して, 次の定理を示す. $(\mathfrak{g},\mathfrak{f})$ 表 1 のリー環の組とする. V を中心電荷 24 の強正規な正則 VOA とし, $V_1\cong\mathfrak{g}$ と仮定する.

定理 5.1. $V\cong\tilde{V}_{N(\mathfrak{f})}(\theta)$ である.

$\mathfrak{g}$ の単純イデアル分解を $\mathfrak{g}_{(1),k_1}\oplus\cdots\mathfrak{g}_{(t),k_t}$ と書く. ここで, $g_{(i),k_i}$ 達は表 1 における順番と同じ順番で並べる. 例えば, $\mathfrak{g}=D_{6,2}B_{3,1}^2C_{4,1}$ のとき, $\mathfrak{g}_{(1)}=D_6$, $\mathfrak{g}_{(2)}=B_3$, $\mathfrak{g}_{(3)}=B_3$ and $\mathfrak{g}_{(4)}=C_4$ である.

$\mathfrak{g}$ の半単純元 h を表 2 で定める. ここで, $\{\varpi_i\}$ は各単純イデアルの基本ウェイトであり, [Bou] の記法に従う. また, D_2 の ϖ_1 とは A_2 のウェイト (ϖ_1,ϖ_1) のことである.

補題 5.1. h は条件 $\langle h|h\rangle=2$, $(h|\boldsymbol{\lambda})\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $d(\boldsymbol{0})=1$ を満たし, $\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$ となる任意の $\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{P}_{\mathfrak{g}}$ に対して $d(\boldsymbol{\lambda})>-3/2$ を満たす. さらに σ_h は V の位数 2 の自己同型であって, $\mathfrak{g}^{\sigma_h}=\mathfrak{g}$ を満たす.

表 2: 半単純元 $h \in \mathfrak{g}$.

ケース	$\mathfrak{g}$	h
(A) $(n\|12)$	$B_{n,2}^{12/n}$	$(\varpi_1, 0, \ldots, 0)$ $(12/n-1$ 個の $0)$
(B) $(n\|4)$	$D_{2n,2}^{4/n} B_{n,1}^{8/n}$	$(\varpi_1, 0, \ldots, 0)$ $(12/n-1$ 個の $0)$
(C) $(n\|4)$	$D_{2n+1,2}^{4/n} A_{2n-1,1}^{4/n}$	$(0, \ldots, 0, \varpi_n, \ldots, \varpi_n)$ $(4/n$ 個の 0 と $\varpi_n)$
(D)	$C_{4,1}^4$	$(\varpi_4, 0, 0, 0)$
(E)	$D_{6,2} B_{3,1}^2 C_{4,1}$	$(\varpi_1, 0, 0, 0)$

σ_h が位数 2 となることの証明には, [KM] の結果等を使う. 定理 2.1, 補題 4.1–4.3, 5.1 より, 次を得る.

補題 5.2. 組 (V, σ_h) は $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド構成法が適用可能である. さらに, $V^{\mathrm{T}}(\sigma_h)_{\frac{1}{2}} = 0$ である.

組 (V, σ_h) に $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド構成法を適用して得られた VOA を $W = \tilde{V}(\sigma_h)$ と書く.

補題 5.3. $\tilde{V}(\sigma_h) \cong V_{N(\mathfrak{f})}$ である.

Proof. 命題 2.2 より, $W_1 \cong \mathfrak{f}$ を示せばよい. ここでは, ケース (A) $((\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) = (B_{n,2}^{12/n}, A_{2n,1}^{12/n}),\ n|12)$ のみ示す. W_1 の単純イデアル分解を $W_1 = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{s}_{(i),\ell_i}$ とかく. $\dim \mathfrak{g} = 12(2n+1)$ なので, (2.1) より, $\dim W_1 = 48(n+1)$ である. i を $\{1, \ldots, r\}$ の元とする. このとき, 命題 1.1 より, $h_i^\vee/\ell_i = (\dim W_1 - 24)/24 = 2n+1$ を得る. ここで, $h_i^\vee$ は $\mathfrak{s}_{(i)}$ の双対コクセター数である. ℓ_i は正整数なので $h_i^\vee$ は $2n+1$ で割り切れる. n によって場合分けする.
(1) $n = 1$. 命題 3.1, 3.3 を W_1 と $a = a_{V,\sigma_h} \in \mathrm{Aut}(W_1)$ に適用して, $\mathfrak{s}_{(i)}$ が A_1, A_2, B_3, C_2, D_4, D_3, G_2 のいずれかのタイプを持つことが分かる. $3|h_i^\vee$ なので, $\mathfrak{s}_{(i)} \cong A_2, C_2, D_4$ のいずれかである. $\dim W_1 = 96$ より, W_1 は $D_{4,2}^2 C_{2,1}^4$, $D_{4,2} A_{2,1} C_{2,1}^6$, $D_{4,2} A_{2,1}^6 C_{2,1}^2$, $A_{2,1}^2 C_{2,1}^8$, $A_{2,1}^7 C_{2,1}^4$, $A_{2,1}^{12}$ のいずれかである. $\mathfrak{g} = A_1^{12}$ なので, $\mathfrak{s}_{(i)} \cong D_4$, C_2, A_2 のとき, $\mathfrak{s}_{(i)}^a$ はそれぞれ A_1^4, A_1^2, A_1 となる. $\mathfrak{g}$ のリー環のランクが 12 であることと合わせて, $W_1 \cong A_{2,1}^{12}$ を得る.
(2) $n = 2$. 同様にして, 命題 3.1, 3.3 を用いて, $\mathfrak{s}_{(i)} \cong B_2$, A_4, C_4, D_5 のいずれかであることが分かる. さらに $5|h_i^\vee$ より, $\mathfrak{s}_{(i)} \cong A_4$, C_4 のいずれかであることがわかる. よって, $W_1 = C_{4,1}^4$, $C_{4,1}^2 A_{4,1}^3$, $A_{4,1}^6$ のいずれかである. $\mathfrak{g} = B_2^6$ より, $\mathfrak{s}_{(i)} \cong C_4$

であれば $\mathfrak{s}_{(i)}^a \cong B_2^2$ であり, $\mathfrak{s}_{(i)} \cong A_4$ であれば $\mathfrak{s}_{(i)}^a \cong B_2$ である. $\mathrm{rank}(\mathfrak{g}) = 6$ であることを用いて, $\tilde{V}_1 \cong A_{4,1}^6$ となることが分かる.

(3) $n \geq 3$, $n|12$. $\mathfrak{g} = B_n^{12/n}$ より, 命題 3.1, 3.3 を用いて, $\mathfrak{s}_{(i)} = B_n$, A_{2n}, D_{2n+1} のいずれかであることが従う. $(2n+1)|h_i^\vee$ なので, $\mathfrak{s}_{(i)} = A_{2n}$ である. よって, $W_1 \cong A_{2n,1}^{12/n}$ を得る.

(1)–(3) を合わせて, 各 $n|12$ に対して, $W \cong V_{N(\mathfrak{f})}$ を得た. □

こうして, 補題 5.1–5.3 に定理 2.2, 系 3.1 を合わせて, 定理 5.1 が得られた. これより, 定理 1.1 も従う.

参考文献

[Bou] Bourbaki, N.: Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6. Vol. 2. Springer Science & Business Media (2008)

[DGM] Dolan, L., Goddard, P., Montague, P.: Conformal field theories, representations and lattice constructions. Comm. Math. Phys. **179**, 61–120 (1996)

[DGH] Dong, C., Griess Jr, R., Höhn, G.: Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module. Comm. Math. Phys. **193**, 407–448 (1998)

[DLM] Dong, C., Li, H., Mason, G.: Modular invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine. Comm. Math. Phys. **214**, 1–56 (2000)

[DM1] Dong, C., Mason, G.: Holomorphic vertex operator algebras of small central charge. Pacific J. Math. **213**, 253–266 (2004)

[DM2] Dong C., Mason, G.: Rational vertex operator algebras and the effective central charge. Int. Math. Res. Not. **2004**, 2989–3008 (2004)

[EMS] van Ekeren, J., Möller, S., Scheithauer, N.: Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras. arXiv:1507.08142 (2015)

[H] Helgason, S.: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics. **80**. Academic Press, New York-London (1978)

[KLL] Kawasetsu, K., Lam, C.H. and Lin, X. "$\mathbb{Z}_2$-orbifold construction associated with (-1)-isometry and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24." arXiv:1611.07655

[KM] Krauel, M., Miyamoto, M.: A modular invariance property of multivariable trace functions for regular vertex operator algebras. J. Algebra **444**, 124-142 (2015)

[LLin] Lam, C., Lin, X.: Holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 with Lie algebra $F_{4,6}A_{2,2}$. arXiv:1612.08123 (2016)

[LS1] Lam, C., Shimakura, H.: Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24. Amer. J. Math. **137**, 111–137 (2015)

[LS2] Lam, C., Shimakura, H.: Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms. Comm. Math. Phys. **342**, 803–841 (2016)

[LS3] Lam, C., Shimakura, H.: Reverse orbifold construction and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras. arXiv:1606.08979 (2016)

[Mo] Montague, P.: Orbifold constructions and the classification of self-dual $c = 24$ conformal field theories. Nucl. Phys. B **428**, 233–258 (1994)

[SS] Sagaki, D., Shimakura, H.: Application of a $\mathbb{Z}_3$-orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices. Trans. Amer. Math. Soc. **368**, 1621–1646 (2016)

[Sch] Schellekens, A.: Meromorphic $c = 24$ conformal field theories. Comm. Math. Phys. **153**, 159–185 (1993)